

# Chapitre XVIII : Séries numériques

Dans tout ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  sera dit une suite *numérique*.

## I Généralités

### Définition I.1

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  une suite numérique. On appelle **série numérique** de terme général  $u_n$ , la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par

$$\dots\dots\dots$$

La notation  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  désigne alors la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le terme  $S_n$  est appelé la somme partielle d'ordre  $n$  de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ .

**Remarque 1 :** Attention aux notations ne confondez pas

- la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  qui est une suite particulière ( $n$  y est un indice muet),
- le terme général  $u_n$  de la série qui est à  $n$  fixé un réel/complexe,
- la somme partielle  $\sum_{k=0}^n u_k$  qui est à  $n$  fixé un réel/complexe.

**Exemple 2 :**

1. Calculer la série dont le terme général est donné pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = n^2$ .
2. Calculer la série dont le terme général est donné pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = n^3$ .
3. (*Somme d'une suite arithmétique*) Calculer la série dont le terme général est donné pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = a + rn$ , où  $(a, r) \in \mathbb{C}^2$ .
4. La série de terme général  $\frac{1}{n}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  n'admet aucune formule explicite pour sa somme partielle

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

On appelle cette série la série harmonique.

**Remarque 3 :** Il est toujours possible de définir une suite uniquement à partir d'un certain rang  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Par exemple la série de terme général  $\frac{1}{\ln(n)}$  n'est défini qu'à partir du rang 2 :

$$\forall n \geq 2, \quad S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\ln(k)}.$$

**Remarque 4 :** Une série étant une suite, tous les résultats sur les suites vus au chapitre XV peuvent s'appliquer à la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ . Attention cependant à ne pas confondre le comportement de la **suite**  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et le comportement de la **série**  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ .

**Exemple 5 :** On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{-1}{n}$ . Déterminer la monotonie de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . Que peut-on dire de la monotonie de la série  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de terme général  $u_n$  ?

**Définition I.2**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  une suite numérique. On dit que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  **converge** si et seulement si la suite des sommes

partielles  $\left( \sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. La limite est appelée alors **la somme de la série** et est notée par

.....

Lorsque la série ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

**Remarque 6 :**

1. Etudier la nature d'une série c'est déterminer si elle est convergente ou divergente. Une série divergente peut diverger vers  $+\infty$ , diverger vers  $-\infty$  ou diverger bizarrement.
2. On ajoute une nouvelle notation pour la somme totale  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$  qui est un réel/complexe fixé qui ne dépend d'aucune variable (la notation  $k$  est ici muette) et ne doit pas être confondu avec la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  ou la somme partielle  $\sum_{k=0}^n u_k$ .
3. Puisque la somme est une limite, il est absolument INTERDIT d'écrire la somme d'une série  $\sum_{p=0}^{+\infty} u_p$  avant d'avoir justifié au préalable l'existence de la limite i.e. la convergence de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ .

**Exemple 7 :**

1. Etudier la nature de la série de terme général  $n$ .
2. Etudier la nature de la série de terme général  $\frac{1}{2^n}$ .
3. Etudier la nature de la série de terme général  $(-1)^n$ .

**Proposition I.3**

La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes : soient  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites numériques telles qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $a_n = b_n$ . Alors les séries  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$  ont même nature.

**Démonstration.** Posons pour tout  $n \geq 0$ ,  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$  et  $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$  les sommes partielles des séries  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$  respectivement. Alors pour tout  $n \geq n_0 + 1$ ,

$$B_n = \sum_{k=0}^n b_k = \sum_{k=0}^{n_0} b_k + \sum_{k=n_0+1}^n b_k = B_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^n b_k.$$

Or pour tout  $k \geq n_0 + 1$ ,  $b_k = a_k$ , donc pour tout  $n \geq n_0 + 1$ ,

$$B_n = B_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^n a_k = B_{n_0} + A_n - A_{n_0}.$$

De cette égalité, on en déduit que les SUITES  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ont le même comportement asymptotique :  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge si et seulement si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Donc les séries  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$  sont de même nature.  $\square$

**Remarque 8 :** Attention ! Ce n'est pas parce que deux séries ont le même terme général à partir d'un certain rang que leurs sommes coïncident. Par exemple si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = 2^{-n}$  alors on a vu que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  est convergente et de somme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 2.$$

Posons pour tout  $n \geq 1$ ,  $v_n = u_n = 2^{-n}$  et  $v_0 = 10$ . Par la proposition précédente,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  a même nature que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  et converge donc. Cependant,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} v_k = v_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k = v_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} u_k = v_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - u_0 = 10 + 2 - 1 = 11,$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} v_k \neq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

#### Définition I.4

Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  une série numérique. **On suppose que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge**, alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k \geq n+1} u_k$  est aussi une suite convergente et sa somme est alors donnée par

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Le terme  $R_n$  est appelé **le reste** d'ordre  $n$  de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ .

#### Proposition I.5

Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  une série numérique. On suppose que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $S_n$  sa somme partielle d'ordre  $n$ ,  $R_n$  son reste d'ordre  $n$  et  $S$  sa somme.

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

.....

2. La suite des restes  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = 0.$$

#### Proposition I.6

Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  est une série convergente alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

**Remarque 9 :** Par contraposée, si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas vers 0 alors la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  diverge.

#### Définition I.7

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  une suite numérique. Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas vers 0 alors on dit que

.....

**Anti-Proposition I.8**

ATTENTION, si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  alors la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  NE converge PAS FORCEMENT.

**Exemple 10 :** La suite  $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0 et pourtant la série harmonique  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$  diverge vers  $+\infty$  (cf exo8 TD15). On peut même montrer que

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n).$$

**Remarque 11 :** Ce qu'il faut retenir c'est qu'une série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge si et seulement si

1.  $u_n$  tend vers 0.
2. La vitesse de convergence de  $u_n$  vers 0 est assez rapide.

Bien entendu la difficulté réside dans la détermination de la vitesse. Dans le cas des séries à termes positifs nous allons voir avec les séries de Riemann que  $\frac{1}{n}$  marque la frontière (si on va plus vite : bien, si on est en  $1/n$  ou plus lent : pas bien).


**Proposition I.9**

L'ensemble des séries convergentes forment un sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  et l'application  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$  est une forme linéaire de l'ensemble des séries convergentes. Autrement dit si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  sont deux séries convergentes alors pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (\lambda u_n + \mu v_n)$  est aussi une série convergente et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

**Démonstration.** Soient  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  deux séries convergentes et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$  deux scalaires. On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^n (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^n u_k + \mu \sum_{k=0}^n v_k \quad \text{par linéarité de la somme.}$$

La suite des sommes partielles  $(\sum_{k=0}^n (\lambda u_k + \mu v_k))_{n \in \mathbb{N}}$  est donc la combinaison linéaire de deux suites  $(\sum_{k=0}^n u_k)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\sum_{k=0}^n v_k)_{n \in \mathbb{N}}$  convergentes. Donc  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (\lambda u_n + \mu v_n)$  converge et par passage à la limite dans l'égalité précédente, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

□

**Anti-Proposition I.10**

Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  deux séries numériques. Si la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n + v_n)$  converge cela N'implique PAS que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  ou que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  converge.

**Exemple 12 :** On a

$$0 = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - 1) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} 1,$$

les deux dernières sommes n'étant pas définies.

**Remarque 13 :** Pour obtenir l'égalité

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k,$$

il faut et il suffit que deux des sommes parmi les trois existent et dans ce cas uniquement la troisième existe et l'égalité est vérifiée.

## II Quelques séries usuelles

### Proposition II.1 (Séries géométriques)

Soit  $q \in \mathbb{K}$ .

1. La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n$  converge si et seulement si  $|q| < 1$ .
2. Si  $|q| < 1$ , alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

**Remarque 14 :** Si  $|q| \geq 1$  alors la série géométrique  $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n$  diverge grossièrement.

### Proposition II.2 (Séries télescopiques)

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  une suite numérique. Alors la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_{n+1} - a_n)$ , dite télescopique, converge si et seulement si la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  converge et en cas de convergence, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (a_{k+1} - a_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - a_0.$$

**Démonstration.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La somme partielle étant une somme (finie!) télescopique, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0.$$

On en déduit que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_{n+1} - a_n)$  converge si et seulement si la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et en cas de convergence par passage à la limite, on obtient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (a_{k+1} - a_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - a_0.$$

□

**Exemple 15 :** Etudier la nature de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$ .

### Proposition II.3 (série exponentielle)

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$  converge et sa somme totale vaut

.....

### Proposition II.4 (comparaison série-intégrale)

Soient  $a \in \mathbb{R}_+$  et  $f : [a; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On suppose que  $f$  est décroissante. Alors pour tout  $(q, p) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $p \geq q \geq a + 1$ , on a

.....

**Remarque 16 :**

- La proposition peut être adaptée sur les bornes, il est surtout important de retenir le principe et de pouvoir retrouver les inégalités rapidement sur un schéma.
- On peut également énoncer une propriété analogue lorsque  $f$  est continue et croissante.

**Exemple 17 :** Montrer que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n \ln(n)}$  diverge et déterminer un équivalent simple de ses sommes partielles.

**Proposition II.5 (Séries de Riemann)**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

### III Séries à termes positifs

**Proposition III.1**

Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  une série à termes positifs i.e. telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 0$ . Alors la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  est une suite croissante. Ainsi,

1. la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  est majorée et alors converge.
2. la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  n'est pas majorée et diverge alors vers  $+\infty$ .

**Démonstration.** Les points 1 et 2 découle de la croissance de la série et du théorème de convergence monotone. Il nous faut donc juste montrer que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  est croissante. Posons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n$  la somme partielle d'ordre  $n$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^n u_k = u_{n+1}.$$

Or par hypothèse  $u_n \geq 0$  et donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_{n+1} \geq S_n$  ce qui démontre bien que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  est croissante.  $\square$

**Remarque 18 :** La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  peut être positive à partir d'un certain rang seulement. Dans ce cas, la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  est croissante à partir d'un certain rang et les points 1 et 2 restent vrais.

**Théorème III.2 (Théorème de comparaison)**

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles. On suppose qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq u_n \leq v_n.$$

Alors

1. Si la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  converge alors la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge et de plus

$$0 \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k.$$

2. Si la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  diverge alors la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  diverge également.

**Anti-Proposition III.3**

Supposons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq \sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^n v_k,$$

1. Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  converge alors cela N'implique PAS en général que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge !
2. De même si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  diverge alors cela N'implique PAS en général que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  diverge !

En conséquence il est absolument vital de vérifier rigoureusement les hypothèses du théorème de comparaison (sans sommer l'inégalité !) et d'invoquer le théorème en question avant de conclure.

**Exemple 19 :** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = (-1)^{n+1}$  et  $v_n = \frac{1}{n^2}$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=1}^n u_k = 0$  ou 1 (suivant la parité de  $n$ ) et par positivité de son terme général  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$  est croissante et donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=1}^n v_k \geq \frac{1}{1^2} = 1$ . Ainsi pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$0 \leq \sum_{k=1}^n u_k \leq \sum_{k=1}^n v_k,$$

et pourtant  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  diverge et  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$  converge !

**Exemple 20 :**

- Déterminer la nature de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^{n^2}$  pour tout  $q \in \mathbb{R}_+$ .
- Déterminer la nature de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\ln(n)}$  à l'aide de la série harmonique.

**Proposition III.4**

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites à termes strictement positifs à partir d'un certain rang. Si

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$$

alors les séries  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  sont de même nature.

**Démonstration.** Puisque  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ , on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ . Donc il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2}.$$

Autrement dit pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq \frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n.$$

Donc si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  converge, l'inégalité de droite implique par le théorème de comparaison des séries à termes positifs que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge. Réciproquement si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  diverge, l'inégalité de gauche implique par le théorème de comparaison des séries à termes positifs que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  diverge.  $\square$

**Remarque 21 :** Rappelons que si deux séries ont la même nature, la convergence de l'une implique la convergence de l'autre mais l'égalité des sommes n'est pas vérifiée en général.

**Remarque 22 :**

- Il suffit de vérifier que l'une de deux suites seulement est strictement positive à partir d'un certain rang. En effet par propriété sur les équivalents, si pour tout  $n \geq n_0$ ,  $v_n > 0$  et si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ , alors il existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_1$ ,  $u_n > 0$ .
- Quitte à considérer  $u'_n = -u_n$  et  $v'_n = -v_n$ , on peut remplacer positif par négatif : si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$  et si pour tout  $n \geq n_0$ ,  $v_n < 0$  alors,  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$  sont de même nature.

**Exemple 23 :**

- Donner la nature de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$ .
- Donner la nature de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ .

## IV Convergence absolue

Cette partie est une partie du programme de PT mais est très abordable en première année.

**Définition IV.1**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  une suite numérique. On dit que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  **converge absolument** ou encore que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  est **sommable** si et seulement si la série des valeurs absolues ou des modules  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$  converge.

**Proposition IV.2**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  une suite numérique. Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge absolument alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge.

**Remarque 24 :** On retient que ..... mais l'on écrira naturellement (et sans hésiter) que la convergence absolue implique la convergence.

**Démonstration.** Supposons dans un premier temps que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in \mathbb{R}$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq |u_n| - u_n \leq 2|u_n|.$$

Or par hypothèse,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$  converge. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (|u_n| - u_n)$  converge. Or pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = |u_n| - (|u_n| - u_n)$  et donc en tant que différence de deux séries convergentes, on en déduit que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge.

Traisons maintenant le cas plus général, où pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in \mathbb{C}$ . On sait que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq |\operatorname{Re}(u_n)| \leq |u_n|.$$

Or par hypothèse  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$  converge, donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\operatorname{Re}(u_n)|$  i.e.  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Re}(u_n)$  est une série à termes réels qui converge absolument. Donc d'après la première partie de la démonstration, on en déduit que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Re}(u_n)$  converge simplement. De la même façon, on montre que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Im}(u_n)$  converge. Or pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \operatorname{Re}(u_n) + i\operatorname{Im}(u_n)$  donc par combinaison linéaire de séries convergentes, on en déduit que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge.  $\square$

### Remarque 25 :

1. La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$  étant à termes positifs, on pourra utiliser la section précédente pour établir sa convergence.
2. Une série convergente n'est pas nécessairement absolument convergente, l'exemple ci-dessous en est une illustration.

**Exemple 26 :** On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ ,  $A_n = S_{2n}$  et  $B_n = S_{2n+1}$ .

1. Justifier que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  n'est pas absolument convergente.
2. Montrer que  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux suites adjacentes.
3. En déduire que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$  converge.

### Proposition IV.3

L'ensemble des séries à valeurs dans  $\mathbb{K}$  qui convergent absolument est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des séries qui convergent.

**Démonstration.** Soit  $E$  l'ensemble des séries qui convergent et  $F$  l'ensemble des séries qui convergent absolument.

- Par la proposition IV.2, on a vu que  $F \subseteq E$ . On aurait aussi pu dire que  $F$  était un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites de façon plus générale.
- La suite nulle converge bien absolument donc  $0_E \in F$ .
- Soient  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$  et  $(U, V) \in F^2$ . Posons  $U = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  et  $V = \sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ . Alors par l'inégalité triangulaire, on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq |\lambda u_n + \mu v_n| \leq |\lambda| |u_n| + |\mu| |v_n|.$$

Or  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |v_n|$  car par hypothèse,  $U \in F$  et  $V \in F$  sont absolument convergentes. Donc par combinaison linéaire de deux séries convergentes, on en déduit que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (|\lambda| |u_n| + |\mu| |v_n|)$  converge. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\lambda u_n + \mu v_n|$  converge i.e. que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda u_n + \mu v_n$  converge absolument. Donc  $\lambda U + \mu V \in F$  et  $F$  est stable par combinaison linéaire.

Conclusion,  $F$  est bien un sous-espace vectoriel de  $E$ .  $\square$

### Proposition IV.4 (Inégalité triangulaire pour les séries)

Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  une série numérique absolument convergente. On a alors

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|.$$

**Démonstration.** Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  une série numérique absolument convergente. D'après la proposition IV.2 la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge. Donc les sommes  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$  et  $\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$  existent. Ce point paraît anodin mais il est vital pour que la proposition ci-dessus ait un sens ! De plus par l'inégalité triangulaire, on sait que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \sum_{k=0}^n |u_k|.$$

Donc par passage à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$ , et par continuité de la valeur absolue,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=0}^n u_k \right| = \left| \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k \right| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n |u_k| = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|.$$

□

### Rappel

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites numériques. On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n \neq 0$ . Alors on dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **dominée par**  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , noté

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n),$$

si et seulement si  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée i.e. il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\left| \frac{u_n}{v_n} \right| \leq M.$$

### Proposition IV.5

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  une suite numérique et  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$  une suite à termes strictement positifs. Si

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(a_n),$$

et si la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  converge, alors la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge absolument.

**Démonstration.** Puisque  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(a_n)$ , il existe  $M \in \mathbb{R}_+$ , tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq \left| \frac{u_n}{a_n} \right| = \frac{|u_n|}{a_n} \leq M.$$

Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq |u_n| \leq M a_n.$$

Or la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} M a_n$  converge donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$  converge i.e.  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge absolument et en particulier (proposition IV.2) que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge. □

**Remarque 27 :** Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux suites à termes positifs, si

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n),$$

et si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  converge, alors  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$  et par ce qui précède, on en déduit que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge.

**Exemple 28 :** Etudier la nature de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} n e^{-n^2}$ .

**Exemple 29 :** Démontrer la convergence de la série exponentielle.



**Le paradoxe de Zénon :** Le héros Achille dispute une course avec une tortue. Afin de compenser sa grande rapidité, Achille permet à la tortue de démarrer avec une avance. Malgré sa vitesse supérieure, le paradoxe affirme qu'Achille ne parviendra jamais à rattraper la tortue. En effet, au temps initial  $t_0 = 0$ , la tortue aura une distance d'avance  $d_0$ . Il faudra un certain temps  $t_1$  à Achille pour parcourir cette distance  $d_0$ . Cependant pendant ce temps, même si la tortue est lente elle aura malgré tout parcouru une distance  $d_1$ . Donc à l'instant  $t_1$ , la tortue est encore devant à la distance  $d_0 + d_1$  tandis qu'Achille est à la distance  $d_0$ . Achille ne renonce pas et va parcourir la distance  $d_1$  pendant un temps  $t_2$  mais la tortue aura continué à progresser d'une distance  $d_2$  : au temps  $t_1 + t_2$ , Achille est à la distance  $d_0 + d_1$  mais la tortue garde la tête en étant à la distance  $d_0 + d_1 + d_2$ . Ainsi, la tortue reste toujours devant Achille... Il y a baleine sous coquillage, l'avez-vous vue ?



**Bernhard RIEMANN** (Breselenz (Allemagne) 1826 - Selasca (Italie) 1866) fut un mathématicien allemand fils d'un pasteur luthérien qui, malgré de faibles revenus ne permettant pas toujours une bonne nutrition ou d'accès au soin, offre à son fils une éducation soignée à domicile et s'étonne des capacités de Bernhard à résoudre mais aussi à poser lui-même des problèmes toujours plus complexes. Il entre à l'Université à 19 ans et poursuit des études brillantes à Berlin et Göttingen. Malgré les faibles revenus associés, il embrasse une carrière de mathématicien et obtiendra finalement en 1859 la chaire de Dirichlet, lui-même ayant succédé à Gauss qui avait été le directeur de thèse de Riemann. D'un naturel timide Riemann possédait également une santé fragile. Atteint d'une pleurésie compliquée de tuberculose, il effectue de nombreuses convalescences en Italie où il décède à l'âge de quarante ans.

Malgré son décès précoce, l'œuvre de Riemann est colossale et embrasse l'ensemble des mathématiques, révolutionnant parfois certains domaines. Son apport est fondamental en géométrie différentielle où son approche novatrice permet une bien meilleure compréhension des surfaces dites de Riemann et des géométries non-euclidiennes qui permettront à terme l'essor de la relativité. On lui doit également une forte contribution dans la définition de l'intégrale dite de Riemann, dans les fondements de l'analyse moderne et complexe en particulier, dans les équations différentielles, la théorie des nombres, la topologie et les séries trigonométriques.

Son apport considérable en mathématiques nous fait parfois oublier que Riemann s'intéressa également au lien entre les mathématiques et la physique et on lui doit des travaux sur la théorie de la chaleur, de la lumière, des gaz, de l'acoustique, du magnétisme et de la dynamique des fluides.

Deux séries regardent une troisième passer :

« Tu me connais je ne suis pas du genre à dire du mal des autres séries, mais tu te rends compte que cette série converge même lorsque tous ces termes sont rendus positifs ?

-Tu en es sûre ?

-Absolument ! »

On demande à un ingénieur et un mathématicien combien font  $2 \times 2$ .

L'ingénieur propose la méthode suivante : puisque  $2 \times 2 = 2 \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$ , on en déduit par développement en série géométrique que

$$2 \times 2 = 2 \times \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right)$$

Or évidemment les deux premiers termes suffisent amplement pour toute application. Conclusion

$$2 \times 2 = 2 \left( 1 + \frac{1}{2} \right) = 3.$$

Au mathématicien de répliquer : ce n'est absolument pas cela. Il faut écrire

$$2 \times 2 = 2 \times \left( -\frac{1}{1-\frac{3}{2}} \right) = (-2) \left( 1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \dots \right).$$

Or la série de droite est divergente donc  $2 \times 2$  n'existe pas tout simplement.